

Correction Devoir maison n°9

Exercice 1

On considère la fonction $f : t \rightarrow e^t$. Cette fonction est dérivable sur $I = [0; 1]$ et

$$\forall t \in [0; 1], \quad f'(t) = e^t$$

Donc pour $t \in [0, 1]$, $1 \leq f'(t) \leq e$. On prend alors $x \in [0; 1]$. L'inégalité des accroissements finis donne alors

$$(x - 0) \times 1 \leq f(x) - f(0) \leq (x - 0)e$$

$$\iff \boxed{x \leq e^x - 1 \leq ex}$$

Exercice 2

On considère pour $p \in \mathbb{N}^*$ les fonctions suivantes :

$$\begin{cases} f_p(x) = 1 + \ln(x + p) \\ h_p(x) = x - f_p(x) \end{cases}$$

On note (\mathcal{C}_p) la courbe représentative de la fonction f_p .

1. Étude de la fonction f_1 .

(a) On a $f_1(x) = 1 + \ln(1 + x)$. On résout

$$1 + x > 0 \iff x > -1$$

Donc

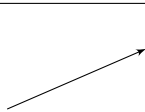
$f_1 \text{ est définie et dérivable sur }]-1, +\infty[$

(b) On dérive la fonction f_1 . Pour tout $x \in]-1, +\infty[$,

$$f_1'(x) = \frac{1}{x+1} > 0.$$

La fonction f_1 est strictement croissante sur $] - 1, +\infty[$. On a les limites

$$\lim_{\substack{x \rightarrow -1 \\ x > -1}} f_1(x) = -\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f_1(x) = +\infty$$

x	-1	$+\infty$
Signe de $f_1'(x)$	$+$	
Variations de f_1	$-\infty$  $+\infty$	

(c) Le développement limité en $x = 0$ de $\ln(1 + x)$ à l'ordre 1 est (en notant $\varepsilon(x)$ une fonction tendant vers 0 quand x tend vers 0.

$$\ln(1 + x) = x + \varepsilon(x)$$

Donc,

$$f_1(x) = 1 + x + x\varepsilon(x).$$

(d) On en déduit que l'équation de la tangente en 0 est donnée par

$$y = 1 + x$$

(e) La fonction f_1 est de classe \mathcal{C}^2 sur $] -1, +\infty[$. On calcule la dérivée seconde de f_1 . On a

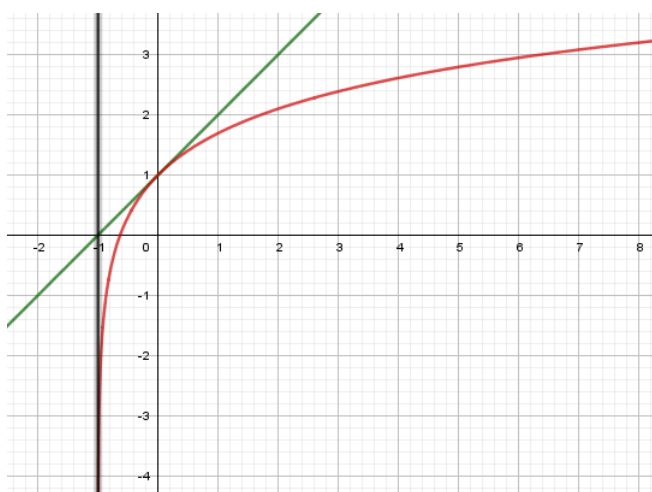
$$f_1''(x) = -\frac{1}{(1+x)^2} < 0$$

La fonction f_1 est donc concave sur $] -1, +\infty[$.

(f) La fonction f_1 étant concave sur $] -1, +\infty[$, elle est en dessous de toutes ses tangentes.

La courbe \mathcal{C}_1 est en dessous de sa tangente.

(g) On trace la courbe avec la tangente en 0 et l'asymptote verticale en $x = -1$.



2. Étude d'une suite $(\alpha_p)_{p \in \mathbb{N}^*}$.

(a) On a $h_p(x) = x - f_p(x) = x - 1 - \ln(x + p)$. La fonction h_p est dérivable sur $] -p, +\infty[$ et

$$h_p'(x) = 1 - \frac{1}{x+p} = \frac{x+p-1}{x+p}.$$

Comme $p \geq 1$, pour tout $x \in]0, +\infty[$, $h_p'(x) > 0$. La fonction h_p est donc strictement croissante. D'une part, on a

$$h_p(0) = -1 - \ln(p) < 0.$$

D'autre part,

$$h_p(x) = x - 1 - \ln(x + p) = x - 1 - \ln(x(1 + p/x)) = x \left(1 - \frac{1}{x} - \frac{\ln(x)}{x} - \frac{\ln(1 + p/x)}{x} \right)$$

Or $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0$ par croissances comparées, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(1 + p/x)}{x} = 0$. Ainsi

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} h_p(x) = +\infty$$

Donc h_p est continue et strictement croissante sur $]0, +\infty[$, donc bijective de $]0, +\infty[$ dans $] -1 - \ln(p), +\infty[$.

Et comme 0 appartient à cet intervalle, l'équation $h_p(x) = 0$ a une unique solution α_p sur $]0, +\infty[$.

Conclusion : l'équation $f_p(x) = x$ admet une unique solution α_p sur $]0, +\infty[$

(b) On a $f_{p+1}(x) = 1 + \ln(x + p + 1)$ donc $f_{p+1}(\alpha_{p+1}) = 1 + \ln(\alpha_{p+1} + p + 1) = \alpha_{p+1}$ et

$$h_p(\alpha_{p+1}) = \alpha_{p+1} - 1 - \ln(\alpha_{p+1} + p) = \ln(\alpha_{p+1} + p + 1) - \ln(\alpha_{p+1} + p).$$

Et comme

$$\begin{aligned} \alpha_{p+1} + p + 1 &> \alpha_{p+1} + p \\ \iff \ln(\alpha_{p+1} + p + 1) &> \ln(\alpha_{p+1} + p) \end{aligned}$$

$$\boxed{h_p(\alpha_{p+1}) > 0}$$

On a donc $h_p(\alpha_{p+1}) > 0 = h_p(\alpha_p)$ et comme la fonction h_p est strictement croissante sur $]0, +\infty[$ et bijective alors $\alpha_{p+1} > \alpha_p$.

$$\boxed{\text{la suite } (\alpha_p)_{p \in \mathbb{N}^*} \text{ est donc croissante.}}$$

(c) On compare les images par h_p . D'une part, $h_p(\alpha_p) = 0$ et

$$\begin{aligned} h_p(1 + \ln(p)) &= 1 + \ln(p) - 1 - \ln(p + 1 + \ln(p)) \\ &= \ln(p) - \ln(p + 1 + \ln(p)) \end{aligned}$$

et comme

$$\begin{aligned} p + 1 + \ln(p) &> p \\ \iff \ln(p) &< \ln(p + 1 + \ln(p)) \\ \iff h_p(1 + \ln(p)) &< 0 = h_p(\alpha_p). \end{aligned}$$

Donc (h_p strictement croissante)

Conclusion : $\boxed{\alpha_p \geq 1 + \ln(p)}$ et par minoration,

$$\boxed{\lim_{p \rightarrow +\infty} \alpha_p = +\infty}$$

3. Valeur approchée de α_1 .

On admet que le réel α_1 appartient à l'intervalle $[1, 3]$. On définit la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N} : u_{n+1} = f_1(u_n) \end{cases}$$

(a) On montre par récurrence les propositions :

$$\mathcal{P}_n = \{u_n \geq 1\}.$$

Initialisation : Pour $n = 0$, on a $u_0 = 1 \geq 1$. La proposition \mathcal{P}_0 est donc vraie.

Hérédité : On suppose la proposition \mathcal{P}_n vraie pour un certain rang $n \geq 0$. On a alors

$$\begin{aligned} u_n \geq 1 &\implies f_1(u_n) \geq f_1(1) \quad \text{La fonction } f_1 \text{ est croissante} \\ &\implies u_{n+1} \geq 1 + \ln(2) \geq 1 \end{aligned}$$

La proposition \mathcal{P}_{n+1} est vraie. La suite de proposition (\mathcal{P}_n) est héréditaire.

Conclusion : On a

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, u_n > 1}$$

- (b) On regarde si la dérivée est bornée par $\frac{1}{2}$. La question précédente ($u_n \geq 1$ suggère que l'on doit s'intéresser à l'intervalle $[1, +\infty[$). D'après la première partie,

$$f_1'(x) = \frac{1}{1+x}$$

Or, pour tout $x \in [1, +\infty[$, on a $0 < f_1'(x) \leq \frac{1}{2}$ Donc

— f_1 est de classe \mathcal{C}^1 sur $I = [1, +\infty[$

— $\forall x \in I, |f_1'(x)| \leq \frac{1}{2}$

— $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \in I$ et $\alpha_1 \in I$.

Donc d'après l'inégalité des accroissements finies

$$|f_1(u_n) - f_1(\alpha_1)| \leq \frac{1}{2}|u_n - \alpha_1|$$

c'est à dire

$$\boxed{|u_{n+1} - \alpha_1| \leq \frac{1}{2}|u_n - \alpha_1|}$$

- (c) On montre par récurrence les propositions :

$$\mathcal{P}_n = \{|u_n - \alpha_1| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\}.$$

Initialisation : Pour $n = 0$, on a $u_0 = 1$ et $\alpha_1 \in [1, 3]$ donc $|u_0 - \alpha_1| \leq 2 = \left(\frac{1}{2}\right)^{-1}$. La proposition \mathcal{P}_0 est donc vraie.

Hérédité : On suppose la proposition \mathcal{P}_n vraie pour un certain rang $n \geq 0$. On a alors

$$\begin{aligned} |u_{n+1} - \alpha_1| &\leq \frac{1}{2}|u_n - \alpha_1| \quad \text{d'après la question précédente} \\ \implies |u_{n+1} - \alpha_1| &\leq \frac{1}{2} \times \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \quad \text{hypothèse de récurrence} \\ \implies |u_{n+1} - \alpha_1| &\leq \left(\frac{1}{2}\right)^n \end{aligned}$$

La proposition \mathcal{P}_{n+1} est vraie. La suite de proposition (\mathcal{P}_n) est héréditaire.

Conclusion : On a

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, |u_n - \alpha_1| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}}$$

- (d) Si $\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \leq 10^{-4}$ alors $|u_n - \alpha_1| \leq 10^{-4}$.

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \leq 10^{-4} &\iff (n-1) \ln\left(\frac{1}{2}\right) \leq -4 \ln(10) \\ &\iff (n-1) \geq 4 \ln(10) / \ln(2) \\ &\iff n \geq 1 + 4 \ln(10) / \ln(2) \end{aligned}$$

qui est réalisé par la partie entière plus 1.

Conclusion : $n_0 = \lfloor 1 + 4 \ln(10) / \ln(2) \rfloor + 1$ la condition est réalisée.

(e) Programme Scilab

```
n0 = floor(1+ 4 * log(10)/log(2)) + 1
u = 1
for k = 1 : n0
    u = 1 + log(1+u)
end
disp (n0, u)
```

Exercice 3

On considère la fonction $f : x \rightarrow e^{-\frac{x^2}{2}}$. On définit la suite (u_n) par

$$u_0 \in [0, 1], \quad \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n)$$

- On pose g la fonction définie sur $[0, 1]$ par $g(x) = f(x) - x$. La fonction g est dérivable sur $[0, 1]$ et $g'(x) = -xe^{-x^2/2} - 1$. Sur $[0, 1]$ on a $g'(x) < 0$ donc
 - g est continue sur $[0, 1]$.
 - g est strictement décroissante sur $[0, 1]$.
 - $g([0, 1]) = [e^{-1/2} - 1, 1]$

Or $0 \in [e^{-1/2} - 1, 1]$ donc, d'après le théorème de la bijection, L'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution sur $[0, 1]$.

Il existe donc un unique $\alpha \in [0, 1]$ tel que $f(x) = x$.

- (a) Soit $x \in [0, 1]$, c'est à dire

$$\begin{aligned} 0 &\leq x \leq 1 \\ \implies 0 &\leq \frac{x^2}{2} \leq \frac{1}{2} \\ \implies 0 &\geq -\frac{x^2}{2} \geq -\frac{1}{2} \\ \implies 1 &\geq e^{-\frac{x^2}{2}} \geq e^{-\frac{1}{2}} > 0 \end{aligned}$$

La fonction f est stable par $[0, 1]$.

- (b) On montre par récurrence les propriétés suivantes $\mathcal{P}_n : \{u_n \in [0, 1]\}$.

- **Initialisation** : $u_0 \in [0, 1]$ donc la propriété \mathcal{P}_0 est vraie.
- **Hérédité** : On suppose que \mathcal{P}_n est vrai pour un certain rang n . On a donc $u_n \in [0, 1]$ et

$$u_{n+1} = f(u_n) \in [0, 1]$$

La proposition \mathcal{P}_{n+1} est donc vraie. On en déduit que la suite des proposition (\mathcal{P}_n) est héréditaire.

- **Conclusion** : Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \in [0, 1]$.

- (a) f est dérivable sur $[0, 1]$ et

$$\forall x \in [0, 1], \quad f'(x) = -xe^{-x^2/2} \leq 0$$

Comme $x \in [0, 1]$, on a

$$x \leq 1 \iff e^{-x^2/2} \geq e^{-1/2}$$

De plus $-x \geq -1$ donc

$$0 \geq -xe^{-x^2/2} \geq -\frac{1}{e^{1/2}} \iff 0 \geq f'(x) \geq -\frac{1}{\sqrt{e}}$$

On en déduit

$$\boxed{\forall x \in [0, 1], \quad |f'(x)| \leq \frac{1}{\sqrt{e}}.}$$

(b) On sait que

- La fonction f est dérivable sur $[0, 1]$
- On a la relation $\forall x \in [0, 1], \quad |f'(x)| \leq \frac{1}{\sqrt{e}}$
- $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \in [0, 1]$ et $\alpha \in [0, 1]$.

Donc d'après l'inégalité des accroissements finis

$$|f(u_n) - f(\alpha)| \leq \frac{1}{\sqrt{e}}|u_n - \alpha|.$$

Comme $u_{n+1} = f(u_n)$ et $f(\alpha) = \alpha$, on a

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, |u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{\sqrt{e}}|u_n - \alpha|.}$$

(c) On montre par récurrence les propriétés suivantes $\mathcal{P}_n : \left\{ |u_n - \alpha| \leq \left(\frac{1}{\sqrt{e}}\right)^n \right\}$.

- **Initialisation** : \mathcal{P}_0 s'écrit $|u_0 - \alpha| \leq 1$, or $u_0 \in [0, 1]$ et $\alpha \in [0, 1]$ donc la distance entre ces deux nombres est inférieure à 1 et donc la propriété \mathcal{P}_0 est vraie.
- **Hérédité** : On suppose que \mathcal{P}_n est vrai pour un certain rang n . On a donc $|u_n - \alpha| \leq \left(\frac{1}{\sqrt{e}}\right)^n$. Et d'après la question précédente :

$$\begin{aligned} |u_{n+1} - \alpha| &\leq \frac{1}{\sqrt{e}}|u_n - \alpha| \\ &\leq \frac{1}{\sqrt{e}} \times \left(\frac{1}{\sqrt{e}}\right)^n && \leq \left(\frac{1}{\sqrt{e}}\right)^{n+1} \end{aligned}$$

La proposition \mathcal{P}_{n+1} est donc vraie. On en déduit que la suite des proposition (\mathcal{P}_n) est héréditaire.

- **Conclusion** : $\boxed{\text{Pour tout } n \in \mathbb{N}, |u_n - \alpha| \leq \left(\frac{1}{\sqrt{e}}\right)^n.}$

(d) Comme $\frac{1}{\sqrt{e}} \in]-1; 1[$, on a

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{e}}\right)^n = 0$$

Par le théorème des gendarmes,

$$\boxed{(u_n) \text{ est convergente et } \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \alpha.}$$